Clase 2: Limites

22 de abril de 2008

En esta clase nos dedicaremos a estudiar los conceptos de Conjuntos abiertos y cerrados así como conjunto de frontera, para luego introducir la noción de limite en $\mathbb{R}^3$

1. Conjuntos abiertos

Definición 1. ***Disco unitario:***
Sean $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *y* $r > 0$. $D_r(x_0) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \|x - x_o\| < r\}$ *Disco abierto (o bola abierta) de centro* x_0 *y radio* r.

Ejemplo 1. $n = 1$ *Intervalo abierto en la recta real.*

$n = 2$ *Interior del disco abierto.*

$n = 3$ $D_r(x_0)$ *es el interior de la bola.*

Definición 2. ***Conjunto abierto:***
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$. *Decimos que* U *es un conjunto abierto si* $\forall x \in U$ *existe* $r\, 0$ *tal que* $D_r(x) \subset U$.

Ejemplo 2.

1. *En* $\mathbb{R}$; $U = (0, 1)$ *es abierto. En efecto* $\forall x \in (0, 1)$, *tomando* $r = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$ *tenemos que: Si* $y \in D(x)$ *entonces* $|y - x| < \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$, *luego* $|y - \frac{1}{2}| \leq |y - x| + |x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}| + |x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \Rightarrow |y - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$.

2. *En general, todo disco abierto es un conjunto abierto:* $U = D_r(x_0)$ *es abierto. En efecto* $\forall x \in D_r(x_0)$, *tomando* $\tilde{r} = r - \|x - x_0\|$ *tenemos que: si* $y \in D_{\tilde{r}}(x)$ *entonces* $\|y - x\| < \tilde{r} = r - \|x - x_0\|$, *luego* $\|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < r - \|x - x_0\| + \|x - x_0\| = r \Rightarrow y \in D_r(x_0)$ *por lo tanto* $D_{\tilde{r}}(x) \subset D_r(x_0)$.

Observación 1.

- *Intuitivamente, un conjunto U es abierto cuando los puntos frontera de U no pertenecen a U*
- *Por convención el conjunto vacío ϕ es abierto.*

3. *El semiplano superior e inferior son conjuntos abiertos*

4. *El rectángulo R $\{-a < x < a, -b < y < b\}$ es abierto En efecto, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, y_1)$ tomando $r < a - |x_1|$ y $r < b - |y_1|$ o $r < min\{r < a - |x_1|, r < b - |y_1|\}$*

5. $\{(x, y) \in \mathbb{R} : x > y\}$

1.1. Vecindades y Puntos Frontera

Definición 3. ***Vecindad:***
Una vecindad V de $x \in \mathbb{R}$ es un conjunto abierto que contiene a X. por ejemplos los discos abiertos $D_r(x_0)$ son vecindades de x_0, para cualquier $r > 0$.

Definición 4. ***Puntos Frontera:***
Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto frontera de A si toda vecindad de x contiene al menos un punto en A, al menos un punto fuera de A.

Ejemplo 3.

1. *En $A = (a, b)$, los puntos frontera son a y b.*

2. *En $\mathbb{R}^2 = \{x : \|x - x_0\| < r, x_0 \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$ los puntos frontera son los del borde.*

3. *Los puntos frontera son:*

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad y = c\} \quad \cup \quad \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad y = d\} \quad \cup \quad \{(x, y) : c \leq y \leq d, \quad x = a\} \quad \cup \quad \{(x, y) : c \leq y \leq d, \quad x = b\}$$

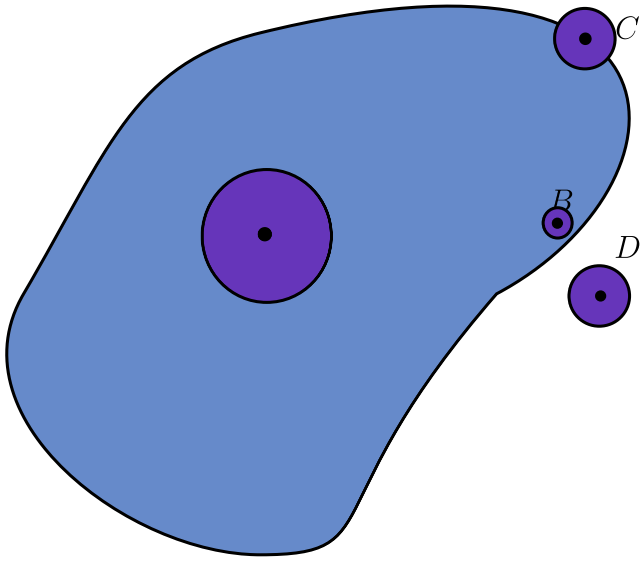
4. *los puntos frontera son el borde y x_0*

5.

Observación 2.

- *Observe que x puede estar o no en A.*
- *Por definición, ningun punto de un conjunto abierto A puede ser un punto frontera de A. En los conjuntos abiertos diremos que x es un punto frontera si y solo si $x \notin A$ y toda vecindad de x tiene intersección no vacia con A.*

- *Intuitivamente los puntos los puntos frontera en conjuntos abiertos estan justo en el borde.*



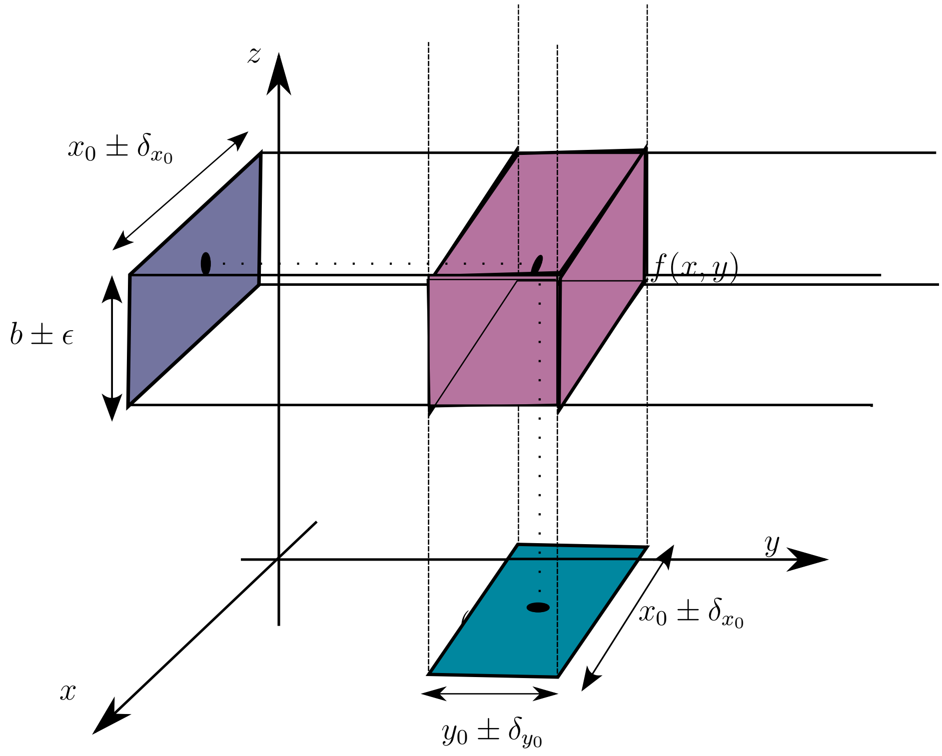
Puntos: **interiores**, **de frontera** y **externos**. Los puntos A y B son puntos internos, el punto C es un punto de frontera y el punto D es un punto externo. Observe la ubicación de los entornos en cada uno de los casos.

2. Limites

Recordemos la definición en $\mathbb{R}$ de limite: Supongamos f definida en un intervalo que contiene a x_0, excepto quizás en x_0. Entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$; si $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$. Esto también puede interpretarse como:
Para toda Vecindad V de L existe una vecindad U de x_0 tal que si $x \in U \cap Dom(f) \setminus x_0$ entonces $f(x) \in V$.
En el caso de varias variables tenemos las siguientes definiciones:

Definición 5. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y sea $x_0 \in A$ o un punto frontera de A. entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ si y solo si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in A$ que satisfaga $0 < \|x - x_0\| < \delta$ se tiene que $\|f(x) - b\| < \epsilon$*

Definición 6. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, A es un conjunto abierto, $x_0 \in A$ o x_0 un punto frontera de A. Decimos que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ si dada cualquier vecindad V de b existe una vecindad U de x_0 tal que $x \in U \cap A \setminus x_0$, asi $f(x) \in V$ cuando x tiende a x_0.*



Esquema de la construcción del Limite en dimensión 3.

2.1. Propiedades de los limites

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in A$ o $x_0 \in \partial(A)$ (el símbolo $\partial(A)$ significa frontera de A), $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. entonces:

i Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} cf(x) = cb$.

ii $\left\{ \begin{array}{l} si \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b_1 \\ y \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b_2 \end{array} \right. \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = b_1 + b_2.$

iii Si $m = 1$, $\left\{ \begin{array}{l} si \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b_1 \\ y \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b_2 \end{array} \right. \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = b_1 b_2.$

iv Si $m = 1$, $\left\{ \begin{array}{l} si \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b \neq 0 \\ y \quad f(x) \neq 0 \forall x \in A \end{array} \right. \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{b}.$

v Si $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$, $f_i : A \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, ..., m$ entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b = (b_1, ..., b_m)$ si y solo si $\lim\limits_{x \to x_0} f_i(x) = b_i$ para cada $i = 1, ..., m$.

2.2. Unicidad Del limite

$$\left\{ \begin{array}{l} si \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b_1 \\ y \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b_2 \end{array} \right. \Rightarrow b_1 = b_2.$$

Para la prueba ver sección 2,7 Marsden and Tromba.

Ejemplo 4. *1. Probar por definición de vecindades que* $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} \overline{x} = \overline{x}_0$ *donde* $(f(\overline{x}) = \overline{x})$ *y* $\overline{x}, \overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

Demostración

Sea V *una vecindad de* $\overline{x}_0$ *y sea* $\overline{x} \to \overline{x}_0$, $\overline{x} \neq \overline{x}_0$, *entonces tomando* U *vecindad de* $\overline{x}_0$ *igual a* V *garantizamos que* $f(\overline{x}) = \overline{x}$ *este en* V *(pues si* $\overline{x} \neq \overline{x}_0 \in U$ *entonces* $f(\overline{x}) = \overline{x} \in V$ *ya que* $U = V$*).*

2. $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} K = k$, *con* k *fijo (todo en* $\mathbb{R}^n$*),* $f(\overline{x}) = k$.

Demostración

Para toda vecindad V *de* k, *tomamos* $U = \mathbb{R}^n$ *(*$\mathbb{R}^n$ *es abierto,* $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\exists r > 0$ *tq* $B_r(y) \subset \mathbb{R}^n$*) vecindad de* $\overline{x}_0$, *con* $\overline{x} \to \overline{x}_0$. *luego* $f(x) = k \in V$. *En realidad* U *puede ser culaquier vecindad que contenga a* $\overline{x}$.

3. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *la función esta dada por*

$f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2+2}$,

Calcular $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$

Solución

$$Sean \left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y) = xy \in \mathbb{R}, \\ f_2(x, y) = x^2 + y^2 + 2 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f_1(x, y) = (\lim_{(x,y) \to (0,0)} x)(\lim_{(x,y) \to (0,0)} y) = 0{,}0 = 0$$

$f_2(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *y*

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f_2(x, y) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} x^2 + \lim_{(x,y) \to (0,0)} y^2 + \lim_{(x,y) \to (0,0)} 2 = 0 + 0 + 2 = 2 \neq 0$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y)} = \frac{0}{2} = 0.$$

4. *$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, la función esta dada por*
   $f(x,y) = (x^2y, y + x^3, y + 1)$,
   calcular $\lim_{(x,y)\to(-1,1)} f(x,y)$.
   Solución

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} f(x,y) = (\lim_{(x,y)\to(-1,1)} x^2y, \lim_{(x,y)\to(-1,1)} y + x^3, \lim_{(x,y)\to(-1,1)} y + 1) = (-1, 0, 0).$$

Observación 3. *Para que $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x})$ exista se requiere que f tienda al mismo numero L por toda curva o trayectoria posible que pase por $\overline{x}_0$. Así si $f(\overline{x})$ no tiende al mismo numero L por dos (2) trayectorias diferentes hacia $\overline{x}_0$, entonces el $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x})$ no existe.*

5. *$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la función esta dada por*
   $f(x,y) = \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$,
   Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
   Solución

   Para calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ *no podemos aplicar el teorema de las propiedades, debemos estudiar los siguientes casos:*

   $x = 0 \quad \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1.$

   $y = 0 \quad \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1.$

   $y = x \quad \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{2x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0 \neq 1.$

   Por lo que el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *no existe.*

6. *$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la función esta dada por*
   $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$,
   Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
   Solución

De manera analoga al caso anterior no podemos aplicar el teorema de las propiedades, por lo que debemos estudiar distintos casos:

$x = 0 \quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{0.x}{0+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{0}{y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0.$

$y = 0 \quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{0.y}{x^2+0} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{0}{x^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0.$

según la recta $y = mx \quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y = mx) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, mx) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xmx}{x^2 + m^2x^2} =$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{m}{1+m^2}$ *estudiamos dos casos:*

a *si* $m = 1$*, i.e* $y = x$*,se tine que :* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \dfrac{1}{2}$

b *si* $m = -1$*, i.e* $y = x-$*, se tine que :* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \dfrac{-1}{2}$

nótece que a $\neq$*, por lo que el* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *no existe.*

7. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*, la función esta dada por*
$f(x,y) = \frac{x^3y}{x^6+y^2}$,
Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
Solución

Nuevamente no podemos aplicar el teorema de las propiedades, por lo que debemos estudiar los casos siguentes:

Según las rectas $y = mx$**, con** $m \neq 0 \quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y = mx) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, mx) =$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3mx}{x^6+m^2x^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{mx^2}{x^4+m^2} = 0.$

Según las rectas $y = kx^2$**, con** $k \neq 0 \quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y = kx^2) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, kx^2) =$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3kx^2}{x^6+k^2x^4} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{mx}{x^2+k^2} = 0.$

Según las rectas $y = x^3 \quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y = x^3) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, x^3) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3x^3}{x^6+x^6} =$

$\dfrac{1}{2}.$

Como las ultimas dos igualdades son distintas, i.e $(0 \neq \frac{1}{2})$ *podemos decir que :*
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *no existe.*

8. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la función esta dada por*
$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$ *verificar que el limite existe y es igual a cero* (0).
Solución

Para resolver este ejemplo vamos a utilizar coordenadas polares.
Decir que $(x,y) \to (0,0)$ *equivale a decir que en coordenadas polares* $r \to 0$ *independientemente del valor de* θ*, Expresando la función* $f(x,y)$ *en coordenadas polares :*

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta); \\ y = r\sin(\theta). \end{cases}$$

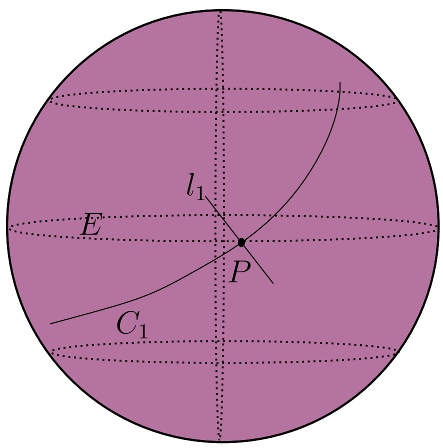
aplicando este cambio a la función $f(x,y)$ *obtenemos la función:*

$$g(r,\theta) = \frac{2r^2\cos^2(\theta) r\sin(\theta)}{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)} = \frac{2r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))} = 2r\cos^2(\theta)\sin(\theta).$$

luego:

$$g(r,\theta) = \overbrace{2\cos^2(\theta)\sin(\theta)}^{funcion\ acotada} \quad \underbrace{r}_{funcion\ que\ tiende\ a\ cero\ para\, r\to 0}$$

así
$\lim\limits_{r\to 0} g(r,\theta)$ *y finalmente* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$



Recuerde que en $\mathbb{R}^3$ a diferencia de $\mathbb{R}^2$, uno se puede acercar a un punto por muchas direcciones, por ejemplo al punto P se puede llegar por medio de: la recta l_1, la curva C_1 y por la circunferencia ecuatorial E.